$\mathcal{Z}$-TRANSFORMACIJA

LAPLACEova transformacija je primer integralne transformacije koja se primenjuje na funkcije - originale. Ova transformacija se primenjuje u linearnim sistemima koji su opisani diferencijalnim jednačinama. U diskretnim sistemima, umesto funkcija, javljaju se nizovi. Jedna od najvažnijih diskretnih transformacija je z-transformacija.

Neka je dat niz

$$(f_n) = f_0, f_1, \dots, f_n, \dots \tag{1}$$

Definicija 1. z-transformacija niza (1) definisana je jednakošću

$$\boxed{F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n z^{-n},} \tag{2}$$

pri čemu se pretpostavlja da red u (2) konvergira bar za jednu konačnu vrednost kompleksne promenljive z.

Za z-transformaciju upotrebljavamo oznaku

$$\mathcal{Z}(f_n) = F(z).$$

Slično kao kod LAPLACEove transformacije, niz (f_n) nazivamo *originalom*, a $F(z)$ *slikom.*

PRIMER 1. Niz (f_n) čiji su svi članovi jednaki nuli, osim $f_0 = 1$, ima z-transformaciju

$$\mathcal{Z}(f_n) = 1.$$

PRIMER 2. Niz (f_n) čiji su svi članovi jednaki nuli za $n \geq N$ ima z-transformaciju

$$\mathcal{Z}(f_n) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^{-n},$$

a to je racionalna funkcija od z.

PRIMER 3. Za niz $(f_n) = 1, 1, 1, \dots$, čiji su svi članovi jednaki 1, imamo

$$\mathcal{Z}(f_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1},$$

pri čemu se pretpostavlja da je $|z| > 1$.

PRIMER 4. Niz čiji je opšti član $f_n = e^{\alpha n}$ ima z-transformaciju

$$\mathcal{Z}(e^{\alpha n}) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{\alpha n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\frac{e^{\alpha}}{z}\Big)^n = \frac{z}{z - e^{\alpha}}.$$

Kao što se vidi, z-transformacija niza (f_n) je potencijalni red po $1/z$. Zbog toga za osobine reda (2) važe ista pravila kao kod potencijalnih redova.

Ako je R poluprečnik konvergencije reda (2), tada je ovaj red konvergentan za svako z za koje je $|z| > 1/R$. U daljem tekstu pretpostavićemo da je taj uslov za z uvek ispunjen.

Definicija 2. Za niz (f_n) se kaže da je eksponencijalnog tipa ako postoje brojevi $M > 0$, $s_0 \geq 0$ i $n_0 \geq 0$ takvi da je za svako $n \geq n_0$ ispunjena nejednakost $|f_n| < Me^{s_0 n}$.

Teorema 1. *Svaki niz eksponencijalnog tipa ima z-transformaciju.*

Osobine z-transformacije

Osobine z-transformacije proizilaze iz njene definicije (2). Iznećemo samo osnovne osobine.

1° Linearnost. Važi nejednakost

$$\boxed{\mathcal{Z}\left(\sum_{k=0}^{m} c_k f_{k,m}\right) = \sum_{k=0}^{m} c_k F_k(z),}$$

gde je $\mathcal{Z}(f_{k,n}) = F_k(z)$.

PRIMER 5. Za niz čiji je opšti član

$$\cosh \alpha n = \frac{1}{2}(e^{\alpha n} + e^{-\alpha n})$$

imamo (videti Primer 4)

$$\mathcal{Z}(\cosh \alpha n) = \frac{1}{2}\Big(\frac{z}{z-e^{\alpha}} + \frac{z}{z-e^{-\alpha}}\Big) = \frac{z(z-\cosh\alpha)}{z^2 - 2z\cosh\alpha + 1}.$$

PRIMER 6. Niz čiji je opšti član

$$f_n = \sin \omega n = \frac{1}{2}(e^{i\omega n} - e^{-i\omega n})$$

ima z-transformaciju

$$\mathcal{Z}(\sin \omega n) = \frac{1}{2i}\Big(\frac{z}{z-e^{i\omega}} - \frac{z}{z-e^{-i\omega}}\Big) = \frac{z\sin\omega}{z^2 - 2z\,\cos\omega + 1}.$$

2° Translacija niza.

Teorema 3. *Ako je $\mathcal{Z}(f_n) = F(z)$, tada je*

$$\boxed{\mathcal{Z}(f_{n+k}) = z^k\left(F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} f_n z^{-n}\right)} \tag{3}$$

$$\boxed{\mathcal{Z}(f_{n-k}) = z^{-k}F(z)} \tag{4}$$

gde je $k \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Po definiciji je

$$\mathcal{Z}(f_{n+k}) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+k} z^{-n} = z^k \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+k} z^{-(n+k)}.$$

Ako ovu sumu dopunimo sa $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} f_i z^{-i}$, dobijamo

$$\mathcal{Z}(f_{n+k}) = z^k \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+k} z^{-(n+k)} + \sum_{i=0}^{k-1} f_i z^{-i} - \sum_{i=0}^{k-1} f_i z^{-i} \right).$$

Pošto je zbir prve dve sume z-transformacija of (f_n), dolazimo do jednakosti (3).

Da bisno izveli jednakost (4), pođimo od definicione jednakosti (2). Imamo

$$\mathcal{Z}(f_{n-k}) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n-k} z^{-n}. \tag{5}$$

Kako je $f_{-k} = f_{1-k} = \cdots = f_{-1} = 0$, (5) postaje

$$\mathcal{Z}(f_{n-k}) = \sum_{n=k}^{+\infty} f_{n-k} z^{-n} = z^{-k} \sum_{n=k}^{+\infty} f_{n-k} z^{-(n-k)} = z^{-k} F(z),$$

čime je dokaz završen. ■

Može se uočiti analogija Teoreme 3 (jednakost (4)) sa teoremom kašnjenja kod Laplaceove transformacije.

PRIMER 7. Nađimo z-transformaciju niza čiji je opšti član

$$f_{n-2} = e^{\alpha(n-2)}.$$

Ovde se pretpostavlja da je $f_{-2} = f_{-1} = 0$. Primenom formule (4) i rezultata u Primeru 4, dobijamo

$$\mathcal{Z}\big(e^{\alpha(n-2)}\big) = z^{-2} \mathcal{Z}(e^{\alpha n}) = z^{-2} \frac{z}{z - e^{\alpha}} = \frac{1}{z(z - e^{\alpha})}.$$

3° Osobina sličnosti.

Teorema 4. *Ako je $\mathcal{Z}(f_n) = F(z)$, tada je*

$$\boxed{\mathcal{Z}(a^n f_n) = F\Big(\frac{z}{a}\Big),} \tag{6}$$

gde je $a \neq 0$ kompleksan broj.

Dokaz. Primenom jednakosti (2) imamo

$$\mathcal{Z}(a^n f_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n f_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \Big(\frac{z}{a}\Big)^{-n} = F\Big(\frac{z}{a}\Big).$$

PRIMER 8. Koristeći se formulom (6) (za $a = e^{\alpha}$) i Primerom 6 dobijamo

$$\mathcal{Z}(e^{\alpha n}\sin\omega n) = \frac{(z/e^{\alpha})\sin\omega}{(z/e^{\alpha})^2 - 2(z/e^{\alpha})\cos\omega + 1} = \frac{ze^{\alpha}\sin\omega}{z^2 - 2ze^{\alpha}\cos\omega + e^{2\alpha}}.$$

4° Konvolucija nizova.

Definicija 3. Konvolucija nizova (f_n) i (g_n), u oznaci $(f_n)*(g_n)$, je niz čiji je opšti član $\sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}$.

Na osnovu ove definicije zaključujemo da je konvolucija niz

$$f_0g_0,\ f_0g_1 + f_1g_0,\ f_0g_2 + f_1g_1 + f_2f_0, \dots\ .$$

Jednostavno se zaključuje da konvolucija nizova ima osobinu komutativnosti, distributivnosti i asocijativnosti.

Teorema 5. *Ako je* $\mathcal{Z}(f_n) = F(z)$ *i* $\mathcal{Z}(g_n) = G(z)$, *tada je*

$$\mathcal{Z}((f_n)*g_n)) = F(z)G(z).$$

Primetimo da je ova teorema analogna Borelovoj teoremi o Laplaceovoj transformaciji konvolucije funkcija.

5° Konačne razlike.

Definicija 4. Prednja konačna razlika prvog reda niza (f_n) definisana je pomoću

$$\Delta f_n = f_{n+1} - f)n.$$

Primenom osobine linearnosti dobijamo

$$\mathcal{Z}(\Delta f_n) = \mathcal{Z}(f_{n+1}) - \mathcal{Z}(f_n). \tag{7}$$

Na osnovu (3), za $k = 1$, izlazi

$$\mathcal{Z}(f_{n+1}) = z(F(z) - f_0),$$

tako da se (7) svodi na

$$\mathcal{Z}(\Delta f_n) = z(F(z) - f_0) - F(z).$$

Prema tome, dokazali sledeće tvrđenje:

Teorema 6. *Ako je* $\mathcal{Z}(\Delta f_n) = F(z)$, *tada je*

$$\boxed{\mathcal{Z}(\Delta f_n) = (z-1)F(z) - zf_0} \tag{8}$$

Važi opštija teorema:

Teorema 7. *Ako je* $\mathcal{Z}(f_n) = F(z)$, *tada je*

$$\mathcal{Z}(\Delta^m f_n) = (z-1)^m F(z) - z\sum_{k=0}^{m-1}(z-1)^{m-k-1}\Delta^k f_0,$$

pri čemu se za $k = 0$ uzima $\Delta^0 f_0 = f_0$.

Napomena. Prednja konačna razlika reda k definiše kao

$$\Delta^k f_n = \Delta(\Delta^{k-1} f_n) = \Delta^{k-1} f_{n+1} - \Delta^{k-1} f_n, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Na primer, konačna razlika drugog reda je

$$\Delta^2 f_n = \Delta(\Delta f_n) = \Delta f_{n+1} - \Delta f_n = f_{i+2} - 2f_{n+1} + f_n.$$

PRIMER 9. Za niz $(f_n) = (n)$ imamo

$$\mathcal{Z}(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} n z^{-n}.$$

Kako je $\Delta f_n = (n+1) - n = 1$, $\Delta^2 f_n = \Delta f_{n+1} - \Delta f_n = 0$, sve konačne razlike višeg reda od 1 jednake su nuli. Primenom (8) nalazimo

$$\mathcal{Z}(1) = (z-1)F(z). \tag{9}$$

Ranije smo videli da je $\mathcal{Z}(1) = \dfrac{z}{z-1}$, tako da iz (9) dobijamo

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

U vezi sa ovim primerom pomenimo još dve osobine koje su veoma slične teoremi diferenciranja i teoremi integracije slike kod Laplaceove transformacije.

6° Diferenciranje slike.

Teorema 8. *Ako je $\mathcal{Z}(f_n) = F(z)$, tada je*

$$\mathcal{Z}(nf_n) = -z\frac{dF(z)}{dz}.$$

Dokaz ove teoreme se svodi na diferenciranje definicione jednakosti (2).

PRIMER 10. Za niz $(f_n) = (n)$ dobijamo

$$\mathcal{Z}(n) = \mathcal{Z}(n \cdot 1) = -z \cdot \frac{d}{dz}\frac{z}{z-1} = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

7° Integracija slike.

Teorema 9. *Ako je $\mathcal{Z}(f_n) = F(z)$ i $f_0 = 0$, tada je*

$$\mathcal{Z}\Big(\frac{f_n}{n}\Big) = \int_z^{+\infty} \frac{F(u)}{u} du.$$

8° Inverzna z-transformacija.

Slično LAPLACEovoj transformaciji, inverznu z-transformaciju možemo dobiti, u specijalnim slučajevima, primenom osobina te transformacije. U opštem slučaju važi sledeća teorema:

Teorema 10. *Neka je $z \mapsto F(z)$ analitička funkcija u oblasti $|z| > 1/R$. Tada postoji jedinstven niz (f_n) za koji je $\mathcal{Z}(f_n) = F(z)$, čiji je opšti član*

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C F(z) z^{n-1} dz \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$
$$f_n = 0 \quad (n < 0),$$

gde je C kružna linija poluprečnika $r > 1/R$ sa centrom u koordinatnom početku.

Podsećamo da je R poluprečnik potencijalnog reda $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n z^{-n}$ po $1/z$. Definicionu jednakost (2) možemo posmatrati kao TAYLORov red po $1/z$, ili kao LAURENTov red po z. Članovi niza (f_n) su koeficijenti ovih redova.

PRIMER 11. Za funckiju $F(z) = \dfrac{z}{z-1}$ imamo

$$f_n = \mathcal{Z}^{-1}\big(F(z)\big) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z}{z-1} z^{n-1} dz,$$

gde je C kružna linija sa centom u koordinatnom početku, koja obuhvata pol prvog reda $z = 1$. Kako je

$$\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{z^n}{z-1} = 1,$$

primenom CAUCHYeve teoreme o ostacima dobijamo

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i = 1.$$

Zaista, ranije smo videli da je $\mathcal{Z}(1) = \dfrac{z}{z-1}$.

PRIMER 12. Korišćenjem z-transformacije i računa ostataka rešiti diferencnu jednačinu

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} - 10x_n = 0 \quad (x_0 = 3,\ x_1 = -1).$$

Rešenje: Neka je $\mathcal{Z}(x_n) = X(z)$. Na osnovu jednakosti (3),

$$\mathcal{Z}(f_{n+k}) = z^k \left(F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} f_n z^{-n} \right),$$

za $k = 1$ i $k = 2$ imamo

$$\mathcal{Z}(x_{n+1}) = z(F(z) - f_0) = zF(z) - zf_0,$$
$$\mathcal{Z}(x_{n+2}) = z^2 \left(F(z) - f_0 - \frac{f_1}{z} \right) = z^2 F(z) - z^2 f_0 - zf_1.$$

Primenom z-transformacije na datu jednačinu dobijamo

$$z^2X(z) - 3z^2 + z - 3(zX(z) - 3z) - 10X(z) = 0,$$

odakle je

$$X(z) = \frac{3z^2 - 10z}{z^2 - 3z - 10}.$$

Ostaje da se nađe inverzna transformacija. Primenom Teoreme 10 nalazimo

$$x_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{3z^2 - 10z}{z^2 - 3z - 10} z^{n-1} dz,$$

gde je C krug $|z| = R$ dovoljno velikog poluprečnika R da obuhvati polove $z = 5,\ z = -2$ podintegralne funkcije $f(z) = X(z)z^{n-1}$.

Ostaci funkcije f u ovim polovima su

$$\operatorname*{Res}_{z=5} f(z) = \lim_{z\to 5}\left((z-5)\frac{3z^2 - 10z}{z^2 - 3z - 10} z^{n-1}\right) = \frac{1}{7}5^{n+1},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-2} f(z) = \lim_{z\to -2}\left((z+2)\frac{3z^2 - 10z}{z^2 - 3z - 10} z^{n-1}\right) = \frac{1}{7}(-2)^{n+4}.$$

Prema tome,

$$x_n = \frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i\Big(\frac{1}{7}5^{n+1} + \frac{1}{7}(-2)^{n+4}\Big),$$

tj.

$$x_n = \frac{1}{7}\big(5^{n+1} + (-2)^{n+4}\big).$$