LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA

1. Pojam transformacije

Pri rešavanju nekih matematičkih problema primenjuju se metodi transformacije. Suština ovih metoda sastoji se u integralnim transformacijama sa ciljem da se neki problemi pojednostavljuju u smislu što se funkciji $f(t)$ realne promenljive, za dati problem, korespondira neka funkcija $F(p)$ kompleksne promenljive sa kojom je znatno jednostavnije operisati. Jedna od takvih transformacija je Laplaceova[1] transformacija. Laplaceova transformacija je deo operatorskog računa koji ima izuzetno veliku primenu u mnogim naučnim disciplinama, kao što su Teorija kola, Elektromagnetika, Teorija automatskog upravljanja, Teorija telekominikacija, itd.

Definicija 1. Originalom se naziva kompleksna funkcija f realne promenljive, koja ispunjava sledeće uslove:

1° $f(t) = 0$ za $t < 0$;

2° Funkcija f zajedno sa svojim izvodima do n-tog reda je deo po deo neprekidna;

3° Postoje pozitivni brojevi K i s takvi da je

$$|f(t)| < Ke^{st} \quad (t > 0).$$

Definicija 2. Laplaceova transformacija ili slika originala f definisana je sa

$$\boxed{\boldsymbol{L}\big(f(t)\big) = F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \quad (p \in \mathbb{C}).} \tag{1.1}$$

Funkcija F u (1.1) zove se Laplaceova slika originala f, a integral koji se pojavljuje u (1.1) naziva se Laplaceov integral.

Primećujemo da nova promenljiva p uvedena definicijom 2 ima prirodu učestanosti ako je t vreme, jer je veličina pt bez dimenzije i $p = 1/t$. Zbog toga se u inženjerskim disciplinama p često naziva *kompleksna učestanost.*

U elektrotehničkim naukama često se operiše sa tzv. *jediničnom funkcijom* ili *Heavisideovom*[2] *funkcijom*, koja se definiše pomoću

$$h(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0), \\ 0 & (t < 0). \end{cases}$$

U tački $t = 0$ funkcija h ima prekid prve vrste. Funkciju $t \mapsto f(t)$ definisanu na intervalu $(-a, +\infty)$ $(0 < a \leq +\infty)$ možemo učiniti originalom ako umesto $f(t)$ pišemo $f(t)h(t)$. Ubuduće uvek ćemo kada govorimo o originalu $f(t)$ podrazumevati funkciju $f(t)h(t)$.

Primer 1.1 Funkcije $1/(t^2 - 1)$, e^{t^2}, $\cos(1/t)$ su primeri funkcija koje nisu originali jer ne ispunjavaju uslove iz definicije 1. Funkcija $f(t) = e^t$, koja je definisana za svako t, postaje original ako se definiše sa $f(t) = e^t$ $(t \geq 0)$, $f(t) = 0$ $(t < 0)$, ili, koristeći jediničnu funkciju, sa $e^t h(t)$.

[1] P. S. Laplace (1749-1827), francuski matematičar, čita se **Laplas**.

[2] O. Heaviside, (1850-1925), engleski inženjer, fizičar i matematičar, čita se **Hevisajd.**

Integral koji se pojavljuje u definiciji 2 je konvergentan, kao što tvrdi sledeća teorema.

Teorema 1.1 (Teorema o konvergenciji). *Ako je f original, tada integral* (1.1) *konvergira u oblasti* $\{p \,|\, \mathrm{Re}\, p \geq a > s\}$.

Dokaz. Neka je $|f(t)| < Ke^{st}$ i $\mathrm{Re}\, p \geq a > s$. Tada imamo

$$|F(p)| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-pt}dt| < K \int_0^{+\infty} |e^{-t(\mathrm{Re}\, p + i \mathrm{Im}\, p)}| e^{st} dt \leq K \int_0^{+\infty} e^{(s-a)t} dt = \frac{K}{a-s}.$$

Ovo znači da funkcija F postoji u navedenoj oblasti. ∎

Sledeću teoremu navodimo bez dokaza.

Teorema 1.2. *Funkcija* $p \mapsto F(p)$, *definisana sa* (1.1), *je analitička u oblasti* $\{p \,|\, \mathrm{Re}\, p \geq a > s\}$.

2. Osnovne osobine Laplaceove transformacije

U ovom odeljku dajemo osnovne osobine Laplaceove transformacije. Dokazi izloženih teorema su zasnovani na definiciji (1.1) i osobinama određenog integrala.

Teorema 2.1 (Teorema o linearnosti). *Važi formula*

$$\boxed{\boldsymbol{L}\big(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\big) = c_1 \boldsymbol{L}\big(f_1(t)\big) + c_2 \boldsymbol{L}\big(f_2(t)\big),} \tag{2.1}$$

gde su c_1 *i* c_2 *proizvoljne konstante.*

Dokaz. Koristeći definiciju (1.1) i osnovne osobine određenog integrala, imamo

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}\big(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\big) &= \int_0^{+\infty} (c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) e^{-pt} dt = c_1 \int_0^{+\infty} f_1(t) e^{-pt} dt + c_2 \int_0^{+\infty} f_2(t) e^{-pt} dt \\ &= c_1 \boldsymbol{L}\big(f_1(t)\big) + c_2 \boldsymbol{L}\big(f_2(t)\big),\end{aligned}$$

odakle sleduje formula (2.1). ∎

Teorema 2.2 (Teorema pomeranja). *Ako je a proizvoljan kompleksan broj i ako je* $\boldsymbol{L}(f(t)) = F(p)$, *imamo*

$$\boxed{\boldsymbol{L}(e^{at} f(t)) = F(p-a).}$$

Dokaz. Prema definiciji (1.1) dobija se

$$\boldsymbol{L}\big(e^{at} f(t)\big) = \int_0^{+\infty} e^{at} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p-a). \blacksquare$$

Teorema 2.3 (Teorema sličnosti). *Ako je* $k > 0$ *i* $\boldsymbol{L}\big(f(t)\big) = F(p)$, *tada je*

$$\boxed{\boldsymbol{L}\big(f(kt)\big) = \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right).}$$

Dokaz. Kako je prema definiciji (1.1)

$$\boldsymbol{L}\big(f(kt)\big) = \int_0^{+\infty} f(kt)e^{-pt}dt,$$

stavljajući $kt = u$, dobijamo

$$\boldsymbol{L}\big(f(kt)\big) = \frac{1}{k}\int_0^{+\infty} f(u)e^{-pu/k}du = \frac{1}{k}F(\frac{p}{k}). \blacksquare$$

Teorema 2.4 (Teorema kašnjenja). *Ako je $\boldsymbol{L}\big(f(t)\big) = F(p)$, tada za svaku pozitivnu konstantu a važi*

$$\boxed{\boldsymbol{L}\big(f(t-a)\big) = e^{-ap}F(p).}$$

Dokaz. Prema definiciji Laplaceove transformacije imamo

$$\boldsymbol{L}\big(f(t-a)\big) = \int_0^{+\infty} f(t-a)e^{-pt}dt.$$

Ako uvedemo smenu $t - a = u$ i uzmemo u obzir da je $f(u) = 0$ za $u < 0$, dobijamo

$$\int_0^{+\infty} f(t-a)e^{-pt}dt = \int_{-a}^{+\infty} f(u)e^{-p(u+a)}du = e^{-ap}\int_0^{+\infty} f(u)e^{-pu}du = e^{-ap}F(p). \blacksquare$$

Teorema 2.5 (Teorema negativnog kašnjenja). *Ako je $a > 0$, tada je*

$$\boxed{\boldsymbol{L}\big(f(t+a)\big) = e^{ap}\left(F(p) - \int_0^{a} f(t)e^{-pt}dt\right),} \tag{2.2}$$

gde je $\boldsymbol{L}\big(f(t)\big) = F(p)$.

Dokaz. Kako je

$$\boldsymbol{L}\big(f(t+a)\big) = \int_0^{+\infty} f(t+a)e^{-pt}dt \quad (a > 0), \tag{2.3}$$

uvodeći smenu $t + a = u$ $(a \le u < +\infty)$, dobijamo

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(t+a)e^{-pt}dt &= \int_a^{+\infty} f(u)e^{-up+ap}du = e^{ap}\int_a^{+\infty} f(u)e^{-pu}du \\ &= e^{ap}\left(\int_0^{+\infty} f(u)e^{-pu}du - \int_0^{a} f(u)e^{-pu}du\right) = e^{ap}\left(F(p) - \int_0^{a} f(u)e^{-pu}du\right).\end{aligned}$$

Odavde, na osnovu (2.3), sleduje (2.2). ■

Teorema 2.6 (Teorema o periodičnoj funkciji). *Neka je original f periodična funkcija sa periodom T. Tada važi formula*

$$\boxed{\boldsymbol{L}\big(f(t)\big) = F(p) = \frac{1}{1-e^{-Tp}}\int\limits_0^T f(t)e^{-pt}dt.} \tag{2.4}$$

Dokaz. Kako je

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = \int\limits_0^T f(t)e^{-pt}dt + \int\limits_T^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt, \tag{2.5}$$

uvodeći smenu $t = u + T$, dobijamo

$$\int\limits_T^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = e^{-Tp}\int\limits_0^{+\infty} f(u+T)e^{-pu}du = e^{-Tp}\int\limits_0^{+\infty} f(u)e^{-pu}du = e^{-Tp}F(p) \tag{2.6}$$

jer je $f(u+T) = f(u)$. Iz formula (2.5) i (2.6) sleduje (2.4). ■

Primer 2.1. Odredimo sliku funkcije $t \mapsto |\sin t|$.

Kako je $t \mapsto |\sin t|$ periodična funkcija sa periodom π, prema formuli (2.4) imamo

$$\boldsymbol{L}(|\sin t|) = \frac{1}{1-e^{-\pi p}}\int\limits_0^{\pi} |\sin t|e^{-pt}dt = \frac{1}{1-e^{-\pi p}}\int\limits_0^{\pi} e^{-pt}\sin t dt$$

jer je $|\sin t| = \sin t$ za $t \in (0,\pi)$. S obzirom da je $\int\limits_0^{\pi} e^{-pt}\sin t dt = \dfrac{1+e^{-\pi p}}{1+p^2}$, dobijamo

$$\boldsymbol{L}(|\sin t|) = \frac{1+e^{-\pi p}}{(1+p^2)(1-e^{-\pi p})} = \frac{\coth\dfrac{\pi p}{2}}{1+p^2}.$$

Teorema 2.7 (Teorema o diferenciranju originala). *Ako su funkcija f i njeni izvodi do n-tog reda originali, tada važi formula*

$$\boxed{\boldsymbol{L}\big(f^{(n)}(t)\big) = p^n\boldsymbol{L}\big(f(t)\big) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1}f^{(k)}(0).} \tag{2.7}$$

Dokaz. Za $n = 1$ imamo

$$\boldsymbol{L}\big(f'(t)\big) = \int\limits_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = e^{-pt}f(t)\Big|_0^{+\infty} + p\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = p\boldsymbol{L}\big(f(t)\big) - f(0),$$

što znači da je u tom slučaju formula (2.7) tačna. Pretpostavimo da formula (2.7) važi za neko n. Imamo

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}\big(f^{(n+1)}(t)\big) &= \int_0^{+\infty} f^{(n+1)}(t)e^{-pt}dt = e^{-pt}f^{(n)}(t)\Big|_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} f^{(n)}(t)e^{-pt}dt \\ &= p\boldsymbol{L}\big(f^{(n)}(t)\big) - f^{(n)}(0) = p\left(p^n\boldsymbol{L}\big(f(t)\big) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1}f^{(k)}(0)\right) - f^{(n)}(0) \\ &= p^{n+1}\boldsymbol{L}\big(f(t)\big) - \sum_{k=0}^{n} p^{n-k}f^{(k)}(0).\end{aligned}$$

Prema tome, iz pretpostavke da (2.7) važi za neko n, dobili smo da (2.7) važi i za $n+1$. Kako je, s druge strane, formula (2.7) tačna za $n = 1$, zaključujemo da je ona tačna za svaki prirodan broj n. ∎

Teorema 2.8 (Teorema o integraciji originala). *Ako je* $\boldsymbol{L}\big(f(t)\big) = F(p)$, *tada je*

$$\boxed{\boldsymbol{L}\left(\int_0^t f(u)du\right) = \frac{F(p)}{p}.}$$

Dokaz. Redom imamo

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}\left(\int_0^t f(u)du\right) &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^t f(u)du\right)e^{-pt}dt = -\frac{e^{-pt}}{p}\int_0^t f(u)du\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt \\ &= \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt = \frac{F(p)}{p}.\ \blacksquare\end{aligned}$$

Teorema 2.9 (Teorema o diferenciranju slike). *Ako je* $\boldsymbol{L}\big(f(t)\big) = F(p)$, *tada važi formula*

$$\boxed{\boldsymbol{L}\big(t^n f(t)\big) = (-1)^n F^{(n)}(p).} \tag{2.8}$$

Dokaz. Kako je

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt,$$

diferencirajući ovu jednakost n puta po p, dobijamo

$$F^{(n)}(p) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t)e^{-pt}dt. \tag{2.9}$$

S druge strane, imamo

$$\boldsymbol{L}\big(t^n f(t)\big) = \int_0^{+\infty} t^n f(t)e^{-pt}dt, \tag{2.10}$$

pa iz (2.9) i (2.10) sleduje formula (2.8). ∎

Primer 2.2. Za nalaženje $\boldsymbol{L}(t^2 \sin t)$ pomoću definicije, trebalo bi rešiti integral $\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}t^2 \sin t\,dt$. Jednostavniji način je primena teoreme o diferenciranju slike, koja daje

$$\boldsymbol{L}(t^2 \sin t) = (-1)^2 F''(p) = \Big(\frac{1}{p^2+1}\Big)'' = \frac{6p^2-2}{(p^2+1)^3}.$$

Teorema 2.10 (Teorema o integraciji slike). *Ako je $\boldsymbol{L}\big(f(t)\big) = F(p)$, i ako integral $\int\limits_p^{+\infty} F(u)du$ konvergira, tada je*

$$\boxed{\boldsymbol{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int\limits_p^{+\infty} F(u)du.} \tag{2.11}$$

Dokaz. Koristeći pretpostavku o konvergenciji integrala $\displaystyle\int_p^{+\infty} F(u)du$, može se promeniti redosled integracije tako da je

$$\int\limits_p^{+\infty} F(u)du = \int\limits_p^{+\infty} du \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-ut}dt = \int\limits_0^{+\infty} f(t)dt \int\limits_p^{+\infty} e^{-ut}du = \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}e^{-pt}dt = \boldsymbol{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right). \ \blacksquare$$

Posledica. *Ako u* (2.11) *pustimo da $p \to 0$, dobijamo važnu formulu*

$$\boxed{\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt = \int\limits_0^{+\infty} F(u)du.} \tag{2.12}$$

Primer 2.3. Funkcija $t \mapsto \mathrm{Si}\,(t)$ (integralni sinus) definisana je sa $\mathrm{Si}\,(t) = \displaystyle\int\limits_0^t \frac{\sin u}{u}du$. Kako je $\boldsymbol{L}(\sin t) = \dfrac{1}{p^2+1}$, prema teoremi o integraciji slike, imamo

$$\boldsymbol{L}\Big(\frac{\sin t}{t}\Big) = \int\limits_p^{+\infty} \frac{1}{p^2+1}dp = \arctan p\Big|_p^{+\infty} = \arctan(+\infty) - \arctan p = \arctan\frac{1}{p}.$$

Ovde smo primenili formulu $\arctan a - \arctan b = \arctan\dfrac{a-b}{1+ab}$, pri čemu u ovom slučaju $a \to +\infty$. Dalje, koristeći se teoremom o integraljenju originala, nalazimo

$$\boldsymbol{L}(\mathrm{Si}\,(t)) = \boldsymbol{L}\left(\int\limits_0^t \frac{\sin u}{u}du\right) = \frac{1}{p}\arctan\frac{1}{p}.$$

Usput, koristeći formulu (2.12), dobijamo

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+p^2}dp = \frac{\pi}{2}.$$

Ovo je poznati Dirichletov integral.

3. Laplaceova transformacija elementarnih funkcija

Najpre ćemo odrediti LAPLACEovu transformaciju funkcija $t \mapsto t^a (a > -1)$ i $t \mapsto e^t$. Dobijeni rezultati, zajedno sa prethodno dokazanim teoremama, omogućuju nalaženje LAPLACEove transformacije još nekih srodnih funkcija.

Kao što je napomenuto na početku, da bi funkcija f bila original neophodno je da bude $f(t) = 0$ za $t < 0$, tako da, na primer, funkcija $t \mapsto e^t$ ne može biti original LAPLACEove tranformacije. Međutim, kada govorimo o LAPLACEovoj transformaciji funkcije $t \mapsto e^t$ mi podrazumevamo funkciju $e^t h(t)$, tj.,

$$t \mapsto \begin{cases} e^t & (t \geq 0), \\ 0 & (t < 0), \end{cases}$$

mada to nećemo eksplicitno isticati.

1° Da bismo odredili LAPLACEovu transformaciju potencijalne funkcije $t \mapsto t^a$, podsetimo da se gama funkcija definiše integralom

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (\operatorname{Re} x > 0).$$

Odavde sleduje da je

$$\Gamma(a+1) = \int_0^{+\infty} x^a e^{-x} dx \quad (a > -1). \tag{3.1}$$

Stavimo $x = pt$ i $dx = pdt$. Integral (3.1) postaje

$$\Gamma(a+1) = \int_0^{+\infty} p^{a+1} t^a e^{-pt} dt,$$

odakle izlazi

$$\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}} = \int_0^{+\infty} t^a e^{-pt} dt.$$

Drugim rečima, dokazali smo formulu

$$\boldsymbol{L}(t^a) = \frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}} \quad (a > -1).$$

Specijalno, ako je $a = n$ $(n \in N)$ imamo

$$\boldsymbol{L}(t^n) = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}} = \frac{n!}{p^{n+1}}, \tag{3.2}$$

odakle za $n = 0$ dobijamo

$$\boldsymbol{L}(1) = \boldsymbol{L}\big(h(t)\big) = \frac{1}{p}.$$

2° LAPLACEova transformacija eksponencijalne funkcije nalazi se direktno po definiciji. Naime, imamo

$$\boldsymbol{L}(e^t) = \int_0^{+\infty} e^t e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{(1-p)t} dt = \frac{1}{p-1} \quad (\operatorname{Re} p > 1).$$

Sada ćemo, primenjujući teoreme iz prethodnog odeljka, odrediti slike nekih elementarnih funkcija.

1) Kako je $\boldsymbol{L}(e^t) = \dfrac{1}{p-1}$, na osnovu teoreme o sličnosti imamo

$$\boldsymbol{L}(e^{at}) = \frac{1}{a}\frac{1}{\dfrac{p}{a}-1} = \frac{1}{p-a}.$$

2) Polazeći od dobro poznatih formula

$$\cos at = \frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}, \quad \sin at = \frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i},$$
$$\cosh at = \frac{e^{at}+e^{-at}}{2}, \quad \sinh at = \frac{e^{at}-e^{-at}}{2},$$

nalazimo

$$\boldsymbol{L}(\cos at) = \frac{1}{2}\boldsymbol{L}(e^{iat}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{L}(e^{-iat}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-ia}+\frac{1}{p+ia}\right) = \frac{p}{p^2+a^2}.$$

Na sličan način dobijamo

$$\boldsymbol{L}(\sin at) = \frac{1}{2i}\big(\boldsymbol{L}(e^{iat}) - \boldsymbol{L}(e^{-iat})\big) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-ia}-\frac{1}{p+ia}\right) = \frac{a}{p^2+a^2},$$
$$\boldsymbol{L}(\cosh at) = \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{L}(e^{at}) + \boldsymbol{L}(e^{-at})\big) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p+a}\right) = \frac{p}{p^2-a^2},$$
$$\boldsymbol{L}(\sinh at) = \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{L}(e^{at}) - \boldsymbol{L}(e^{-at})\big) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p+a}\right) = \frac{a}{p^2-a^2}.$$

3° Koristeći se prethodnim rezultatima i teoremama 2.2 i 2.9, nalazimo

$$\boldsymbol{L}(e^{-at}\cos bt) = \frac{p+a}{(p+a)^2+b^2},$$
$$\boldsymbol{L}(e^{-at}\sin bt) = \frac{b}{(p+a)^2+b^2},$$
$$\boldsymbol{L}(t^a e^{bt}) = \frac{\Gamma(a+1)}{(p-b)^{a+1}} \quad (a>-1).$$

Primer 3.1. Pretpostavimo da se funkcija f može razviti u potencijalni red

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \quad (-\infty < t < +\infty)$$

čiji koeficijenti zadovoljavaju uslov

$$|a_n| < M\frac{s^n}{n!}, \tag{3.3}$$

gde su M i s pozitivne konstante. Koristeći ovu nejednakost lako je pokazati da je funkcija $f(t)$ original, kao i da red

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{n!}{p^{n+1}} \tag{3.4}$$

apsolutno konvergira pod uslovom (3.3) i za $|p| > s$. Zaista,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \frac{n!}{|p|^{n+1}} \le M \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{|p|^{n+1}}\frac{s^n}{n!} = \frac{M}{|p|}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{s}{|p|}\Big)^n,$$

odakle sledi da je red (3.3) apsolutno konvergentan za $|p| > s$.

Na osnovu (3.2) imamo

$$\boldsymbol{L}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k t^k\Big) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{k!}{p^{k+1}}.$$

Kada $n \to +\infty$, na osnovu konvergencije reda (3.4) nalazimo

$$\boldsymbol{L}(f(t)) = \boldsymbol{L}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{n!}{p^{n+1}} = F(p).$$

Prema tome, pod uslovom (3.3) slika potencijalnog reda jednaka je sumi slika svakog člana.

Primenimo gornji rezultat za određivanje Laplaceove slike Besselove funkcije prve vrste koja je definisana sa

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Kako je ispunjen uslov (3.3) jer je $a_{2n+1} = 0$ i

$$|a_{2n}| = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n)!} < \frac{1}{(2n)!},$$

imamo

$$\boldsymbol{L}\big(J_0(t)\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n!}{2^{2n}(n!)^2 p^{2n+1}} = \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{p^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}.$$

4. Konvolucija

Definicija 1. Konvolucija neprekidnih funkcija f i g, u oznaci $f * g$, je integral

$$\boxed{(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)du.} \tag{4.1}$$

Teorema 4.1. *Za konvoluciju važe sledeća tvrđenja:*

1^o $f * g = g * f$,

2^o $(f * g) * h = f * (g * h)$,

3^o $f * (g + h) = f * g + f * h$,

4^o $|f * g| \le |f| * |g|$

5^o *Ako su funkcije f i g originali, tada je i funkcija $f * g$ original.*

Teorema 4.2 (Borelova[3] teorema). *Ako je $\boldsymbol{L}\big(f(t)\big) = F(p)$ i $\boldsymbol{L}\big(g(t)\big) = G(p)$, tada je*

$$\boxed{\boldsymbol{L}\big((f * g)(t)\big) = F(p)G(p).} \tag{4.2}$$

Dokaz. Po definiciji je

$$\boldsymbol{L}\big((f * g)(t)\big) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\left(\int_0^t f(u)g(t-u)du\right)dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt \int_0^t f(u)g(t-u)du.$$

[3]Émil Borel (1871-1956), francuski matematičar i državnik.

Promenom redosleda integracije dobijamo

$$\boldsymbol{L}\big((f*g)(t)\big) = \int_0^{+\infty} f(u)du \int_u^{+\infty} e^{-pt}g(t-u)dt.$$

Ako u unutrašnji integral uvedemo smenu $t = \tau + u$, nalazimo

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}\big((f*g)(t)\big) &= \int_0^{+\infty} f(u)du \int_0^{+\infty} e^{-p(\tau+u)}g(\tau)d\tau \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-pu}f(u)du \int_0^{+\infty} e^{-p\tau}g(\tau)d\tau = F(p)G(p),\end{aligned}$$

čime je dokaz završen. ■

Primer 4.1. Konvolucija funkcija $f(t) = \sin t$ i $g(t) = \cos t$ jednaka je

$$(f*g)(t) = \int_0^t \sin u \cos(t-u)du = \frac{1}{2}\int_0^t \big(\sin t + \sin(2u-t)\big)du = \frac{1}{2}t\sin t.$$

Primenom LAPLACEove transformacije na ovako određenu konvoluciju, uz korišćenje (2.8), dobijamo

$$\boldsymbol{L}\big(\tfrac{1}{2}t\sin t\big) = -\tfrac{1}{2}\Big(\frac{1}{p^2+1}\Big)' = \frac{p}{(p^2+1)^2}.$$

Primenom BORELove formule (4.2) direktno dobijamo

$$\boldsymbol{L}(\sin t * \cos t) = \boldsymbol{L}(\sin t)\boldsymbol{L}(\cos t) = \frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1} = \frac{p}{(p^2+1)^2}.$$

Primer 4.2. Na osnovu jednakosti (4.1) i teoreme 2.7, LAPLACEova transformacija konvolucije izvoda $f'(t)$ i funkcije $g(t)$ jednaka je

$$\boldsymbol{L}\left(\int_0^t f'(u)g(t-u)du\right) = \boldsymbol{L}\big(f'(t)\big)\boldsymbol{L}\big(g(t)\big) = \big(pF(p)-f(0)\big)G(p) = pF(p)G(p) - f(0)G(p).$$

Kako je $\boldsymbol{L}\big(f(0)g(t)\big) = f(0)G(p)$, iz prethodne jednakosti dobijamo

$$\boldsymbol{L}\left(f(0)g(t) + \int_0^t f'(u)g(t-u)du\right) = pF(p)G(p). \tag{4.3}$$

Na osnovu osobine komutativnosti za konvoluciju funkcija, važi takođe

$$\boldsymbol{L}\left(g(0)f(t) + \int_0^t g'(u)f(t-u)du\right) = pF(p)G(p). \tag{4.4}$$

Formule (4.3) i (4.4) poznate su kao DUHAMELove[4] formule. Ove formule imaju važnu ulogu u Teoriji električnih kola.

[4] C. Duhamel (1797-1872), francuski matematičar, čita se **Diamel.**

5. Inverzna Laplaceova transformacija

Kao što je poznato, funkcija f koja zadovoljava sledeće uslove:

1) f je deo po deo neprekidna;
2) f ima konačno mnogo ekstremuma;
3) integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|dt$ je konvergentan;

može se prikazati FOURIERovim[5] integralom

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dr \int_0^{+\infty} f(u)\cos r(t-u)du.$$

Uslovi 1) i 2) nazivaju se **Dirichletovi[6] uslovi.**

Polazeći od FOURIERovog integrala dokazuje se sledeća važna teorema:

Teorema 5.1 (Riemann-Mellinova teorema). *Neka je funkcija f original i neka je $\boldsymbol{L}\big(f(t)\big) = F(p)$. Ako funkcija f zadovoljava Dirichletove uslove i ako je integral $\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt$ uniformno konvergentan na pravoj $\{p\,|\mathrm{Re}\ p = s\}$, tada je*

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)e^{pt}dp.} \tag{5.1}$$

Formulom (5.1) dat je obrazac za određivanje originala LAPLACEove transformacije kada je poznata slika. Ta formula definiše tzv. **inverznu Laplaceovu transformaciju**, koja se zapisuje u obliku

$$\boldsymbol{L}^{-1}(F(p)) = f(t).$$

Iz (5.1) odmah vidimo da ako dve funkcije koje su originali imaju istu sliku, tada te dve funkcije imaju iste vrednosti u svim tačkama u kojima su neprekidne. Direktno izračunavanje originala pomoću formule (5.1) vrši se metodama kompleksne analize – konturnom integracijom. Integral na desnoj strani jednakosti (5.1) zove se BROMWICHOV[7] integral, a kontura po kojoj se vrši integracija – *Bromwichova kontura.* Ova kontura je prava $s = c + i\,\omega$ $(-\infty < \omega < +\infty)$ paralelna imaginarnoj osi, pri čemu se c bira tako da se u levoj poluravni od ove prave nalaze svi polovi ili esencijalni singulariteti podintegralne funkcije $p \mapsto F(p)e^{pt}$. Primenom CAUCHYeve teoreme o ostacima jednakost (5.1) postaje

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \sum \mathrm{Res}\big(F(p)e^{pt}\big) = \sum \mathrm{Res}\big(F(p)e^{pt}\big). \tag{5.2}$$

Primer 5.1. Na osnovu 3^o iz 3. odeljka imamo

$$\boldsymbol{L}^{-1}\Big(\frac{p+1}{(p+1)^2+1}\Big) = e^{-t}\cos t,$$

[5] J. B. J. Fourier (1768-1830), francuski matematičar, čita se **Furije.**
[6] L. Dirichlet (1805-1859), nemački matematičar, čita se **Dirihle.**
[7] T. Bromwich (1875-1929), engleski matematičar, čita se **Bromvič.**

ali pronađimo inverznu LAPLACEovu transformaciju pomoću BROMWICHovog integrala.

Funkcija $\dfrac{e^{pt}(p+1)}{(p+1)^2+1}$ ima dva pola $z_1=-1+i,\ z_2=-1-i$. Njihovi ostaci su

$$\operatorname*{Res}_{z=-1+i}\frac{e^{pt}(p+1)}{(p+1)^2+1}=\lim_{p\to-1+i}(p+1-i)\frac{e^{pt}}{(p+1-i)(p+1+i)}=\frac{e^{(-1+i)t}}{2},$$
$$\operatorname*{Res}_{z=-1-i}\frac{e^{pt}(p+1)}{(p+1)^2+1}=\lim_{p\to-1-i}(p+1+i)\frac{e^{pt}}{(p+1-i)(p+1+i)}=\frac{e^{(-1-i)t}}{2},$$

pa je tražena funkcija jednaka zbiru ostataka, tj.

$$f(t)=\frac{e^{(-1+i)t}}{2}+\frac{e^{(-1-i)t}}{2}=e^{-t}\Big(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\Big)=e^{-t}\cos t.$$

Primer 5.2. Odrediti $f(t)$ ako je $F(p)=\dfrac{p+2}{p^2+2p+5}$.

Slika $F(p)$ se može prikazati u obliku

$$F(p)=\frac{p+1+1}{(p+1)^2+2^2}=\frac{p+1}{(p+1)^2+2^2}+\frac{1}{2}\frac{2}{(p+1)^2+2^2}.$$

Upoređivanjem poznatih transformacija sa slikom $F(p)$ dobijamo direktno

$$f(t)=\boldsymbol{L}^{-1}\big(F(p)\big)=\boldsymbol{L}^{-1}\Big(\frac{p+1}{(p+1)^2+2^2}\Big)+\frac{1}{2}\boldsymbol{L}^{-1}\Big(\frac{2}{(p+1)^2+2^2}\Big)=e^{-t}\cos(2t)+\frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t).$$

Na sledećoj stranici dajemo jednu tablicu inverznih LAPLACEovih transformacija nekih racionalnih funkcija, na koje se najčešće nailazi prilikom rešavanja problema.

	Slika	Original
1	$\dfrac{1}{p-a}$	e^{at}
2	$\dfrac{1}{1+ap}$	$\dfrac{1}{a}e^{-t/a}$
3	$\dfrac{1}{p(p-a)}$	$\dfrac{1}{a}(e^{at}-1)$
4	$\dfrac{1}{(p-a)^3}$	$\dfrac{1}{2}t^2e^{at}$
5	$\dfrac{p}{(p-a)(p-b)^2}$	$\dfrac{ae^{at}-(a+b(a-b)t)e^{bt}}{(a-b)^2}$
6	$\dfrac{p}{(p-a)^3}$	$\left(t+\dfrac{1}{2}at^2\right)e^{at}$
7	$\dfrac{1}{p(p^2+a^2)}$	$\dfrac{1}{a^2}(1-\cos at)$
8	$\dfrac{1}{p(p^2-a^2)}$	$\dfrac{1}{a^2}(\cosh at-1)$
9	$\dfrac{1}{(p+b)(p^2+a^2)}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left(e^{-bt}-\cos at+\dfrac{b}{a}\sin at\right)$
10	$\dfrac{(p+b)^2}{p(p^2+a^2)}$	$\dfrac{b^2}{a^2}+\dfrac{a^2-b^2}{a^2}\cos at+2b\sin at$
11	$\dfrac{1}{p^4+a^4}$	$\dfrac{1}{a^3\sqrt{2}}\left(\cosh\dfrac{at}{\sqrt{2}}\sin\dfrac{at}{\sqrt{2}}-\sinh\dfrac{at}{\sqrt{2}}\cos\dfrac{at}{\sqrt{2}}\right)$
12	$\dfrac{1}{p^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2a^3}(\sinh at-\sin at)$
13	$\dfrac{p}{p^4+a^4}$	$\dfrac{1}{a^2}\sin\dfrac{at}{\sqrt{2}}\sinh\dfrac{at}{\sqrt{2}}$
14	$\dfrac{p}{p^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2a^3}(\cosh at-\cos at)$
15	$\dfrac{1}{(p^2+a^2)^2}$	$\dfrac{1}{2a^3}(\sin at-at\cos at)$
16	$\dfrac{1}{(p^2-a^2)^2}$	$\dfrac{1}{2a^3}(at\cos at-\sinh at)$

Izabrani zadaci sa pismenih ispita

Zadatak 1. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$x''(t) - 4x'(t) + 3x(t) = h(t),$$

pod uslovom $x(0) = 0,\ x'(0) = 1$, gde je $h(t)$ jedinična funkcija.

Rešenje: Neka je $\boldsymbol{L}\big(x(t)\big) = X(p)$, tada je $\boldsymbol{L}\big(x'(t)\big) = pX(p) - x(0) = pX(p)$ i $\boldsymbol{L}\big(x''(t)\big) = p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - 1$. Primenom LAPLACEove transformacije na levu i desnu stranu date diferencijalne jednačine, dobijamo

$$p^2X(p) - 1 - 4pX(p) + 3X(p) = \frac{1}{p},$$

odakle je

$$X(p) = \frac{p+1}{p(p^2-4p+3)} = \frac{p+1}{p(p-1)(p-3)} = \frac{1}{3p} - \frac{1}{p-1} + \frac{2}{3(s-3)}.$$

Primenjujući inverznu LAPLACEovu transformaciju, nalazimo

$$x(t) = \boldsymbol{L}^{-1}\big(X(p)\big) = \frac{1}{3} - e^t + \frac{2}{3}e^{3t}.$$

Zadatak 2. Odrediti ono rešenje diferencijalne jednačine

$$y''' - y' = 3(2 - t^2),$$

koje zadovoljava $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$.

Rešenje: Primenjujući LAPLACEovu transformaciju na datu jednačinu dobijamo

$$(p^3 - p)Y(p) - p^2 - p = \frac{6}{p} - 3\frac{2}{p^3},$$

tj.

$$(p^3 - p)Y(p) = \frac{p^5 + p^4 + 6p^2 - 6}{p^3}.$$

Odavde je

$$Y(p) = \frac{p^5 + p^4 + 6p^2 - 6}{p^4(p^2-1)} = \frac{p^4 + 6p - 6}{p^4(p-1)} = \frac{6}{p^4} + \frac{1}{p-1}.$$

Primena inverzne LAPLACEove transformacije daje rešenje jednačine sa datim početnim uslovima

$$y(t) = e^t + t^3.$$

Zadatak 3. Naći ono rešenje diferencijalne jednačine

$$y''(t) + y(t) = f(t),$$

za koje je $y(0) = y'(0) = 0$. Odrediti $y(t)$ u specijalnom slučaju kada je $f(t) = \cos t$.

Rešenje: Neka je $\boldsymbol{L}\big(y(t)\big) = Y(p)$, $\boldsymbol{L}\big(f(t)\big) = F(p)$. Primenom LAPLACEove transformacije dobijamo jednačinu

$$p^2Y(p) - y'(0) - y(0) + Y(p) = F(p), \quad \text{tj.} \quad (p^2+1)Y(p) = F(p), \quad \text{odakle je} \quad Y(p) = \frac{F(p)}{p^2+1}.$$

Kako je $\boldsymbol{L}(\sin t) = \dfrac{1}{p^2+1}$, koristeći BORELovu formulu (4.2) o konvoluciji, imamo

$$y(t) = \int\limits_0^t \sin u f(t-u)du.$$

Specijalno, ako je $f(t) = \cos t$, koristeći rezultat iz primera 4.1, dobijamo

$$y(t) = \sin t * \cos t = \frac{1}{2} t \sin t.$$

Zadatak 4. Funkcija f definisana je sa

$$f(t) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{x^2+a^2} dx \quad (t \geq 0,\ a > 0).$$

a) Odrediti LAPLACEovu transformaciju funkcije $f(t)$.
b) Primenom inverzne LAPLACEove transformacije na dobijenu sliku, naći funkciju f.

Rešenje: Na osnovu definicije (1.1) imamo

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}\big(f(t)\big) = F(p) &= \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = \int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{x^2+a^2}dx\right)e^{-pt}dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2}dx \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\cos tx\, dt \\ &= \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\,\frac{p}{x^2+p^2}dx = \frac{p}{p^2-a^2}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2+a^2} - \frac{1}{x^2+p^2}\right)dx = \frac{p}{p^2-a^2}\left(\frac{\pi}{2a} - \frac{\pi}{2p}\right).\end{aligned}$$

Odavde je

$$F(p) = \frac{\pi}{2a}\,\frac{1}{p+a}.$$

Kako je

$$\boldsymbol{L}^{-1}\big(F(p)\big) = \boldsymbol{L}^{-1}\left(\frac{\pi}{2a}\,\frac{1}{p+a}\right) = \frac{\pi}{2a}e^{-at},$$

sledi da je $f(t) = \dfrac{\pi}{2a}e^{-at}$.

Zadatak 5. Primenom LAPLACEove transformacije rešiti sistem diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} x''(t) + x'(t) + y''(t) - y(t) &= e^t, \\ x'(t) + 2x(t) - y'(t) + y(t) &= e^{-t} \end{aligned}$$

sa početnim uslovima $x(0) = y(0) = y'(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$

Rešenje: Kako je

$$\boldsymbol{L}\big(x(t)\big) = X(p), \quad \boldsymbol{L}\big(y(t)\big) = Y(p), \quad \boldsymbol{L}\big(e^t\big) = \frac{1}{p-1}, \quad \boldsymbol{L}\big(e^{-t}\big) = \frac{1}{p+1},$$

i

$$\boldsymbol{L}\big(x'(t)\big) = pX(p), \quad \boldsymbol{L}\big(y'(t)\big) = pY(p), \quad \boldsymbol{L}\big(x''(t)\big) = p^2X(p) - 1, \quad \boldsymbol{L}\big(y''(t)\big) = p^2Y(p),$$

dati sistem se transformiše u sistem algebarskih jednačina

$$\begin{aligned}(p^2+p)X(p) + (p^2-1)Y(p) &= \frac{p}{p-1},\\ (p+2)X(p) - (p-1)Y(p) &= \frac{1}{p+1}.\end{aligned}$$

Rešavajući ovaj sistem nalazimo

$$\begin{aligned}X(p) &= \frac{2p-1}{2(p-1)(p+1)^2} = \frac{1}{8}\frac{1}{p-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{8}\frac{1}{p+1},\\ Y(p) &= \frac{3p}{2(p^2-1)^2}.\end{aligned}$$

Primena inverzne Laplaceove transformacije na slike $X(p)$ i $Y(p)$ daje rešenja

$$x(t) = \frac{1}{4}\sinh t + \frac{3}{4}te^{-t}, \quad y(t) = \frac{3}{4}\, t\sinh t.$$

Zadatak 6. Odrediti ono rešenje integro-diferencijalne jednačine

$$\frac{dy}{dt} + y + \int_0^t y(u)du = e^{-t} \quad (t > 0),$$

za koje je $y(0) = 0$.

Rešenje: Primenom Laplaceove transformacije dobijamo

$$pY(p) + Y(p) + \frac{1}{p}Y(p) = \frac{1}{p+1},$$

odakle je

$$\begin{aligned}Y(p) &= \frac{p}{(p+1)(p^2+p+1)} = \frac{p+1}{p^2+p+1} - \frac{1}{p+1}\\ &= \frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{1}{p+1}.\end{aligned}$$

Primenom inverzne Laplaceove transformacije na poslednji izraz dobijamo rešenje

$$y(t) = \Big(\cos\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,t + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,t\Big)e^{-t/2} - e^{-t}.$$

Zadatak 7. Primenom LAPLACEove transformacije rešiti diferencijalnu jednačinu

$$ty''(t) + (t-1)y'(t) - y(t) = 0$$

pod uslovima $y(0) = 5,\ y(+\infty) = 0$.

Rešenje: Neka je $\boldsymbol{L}\big(y(t)\big) = Y(p)$. Koristeći teoreme o diferenciranju originala i diferenciranju slike, nalazimo

$$-(p^2Y(p) - 5p - y'(0))' - (pY(p) - 5)' - (pY(p) - 5) - Y(p) = 0,$$

odakle je

$$Y'(p) + \frac{3p+2}{p^2+p}Y(p) = \frac{10}{p^2+p}.$$

Ovo je nehomogena linearna diferencijalna jednačina čije je rešenje

$$Y(p) = \exp\Big(-\textstyle\int u(p)dp\Big)\Big(C + \displaystyle\int v(p)\exp\Big(\textstyle\int u(p)dp\Big)dp\Big),$$

gde je $u(p) = \dfrac{3p+2}{p^2+p},\ v(p) = \dfrac{10}{p^2+p}$. Odavde nalazimo

$$Y(p) = \frac{C}{p^2(p+1)} + \frac{5}{p+1} = C\Big(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}\Big) + \frac{5}{p+1}.$$

Primena inverzne LAPLACEove transformacije daje

$$y(t) = \boldsymbol{L}^{-1}\big(Y(p)\big) = C\big(t - 1 + e^{-t}\big) + 5e^{-t}.$$

Kako je prema uslovu zadatka

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = C\lim_{t\to+\infty} t = 0,$$

jedino izbor $C = 0$ obezbeđuje zahtevani uslov. Prema tome, traženo rešenje je

$$y(t) = 5e^{-t}.$$

Zadatak 8. Primenom teoreme o integraciji slike izračunati

$$a)\ \int_0^{+\infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t}\,dt, \qquad b)\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt,$$

gde je $a > b > 0$.

Rešenje:

a) Kako je $\boldsymbol{L}\big(\cos ct\big) = \dfrac{p}{p^2+c^2}$, koristeći teoremu 2.10 nalazimo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t}\,dt = \int_0^{+\infty}\left(\frac{p}{p^2+a^2} - \frac{p}{p^2+b^2}\right)dp = \frac{1}{2}\log\frac{p^2+a^2}{p^2+b^2}\Big|_0^{+\infty} = -\log\frac{a}{b}.$$

b) Najpre određujemo LAPLACEovu transformaciju funkcije

$$t \mapsto \frac{\sin^2 t}{t} = \frac{1}{2}\frac{1-\cos 2t}{t}.$$

Primenom teoreme o integraciji slike dobijamo

$$\boldsymbol{L}\Big(\frac{\sin^2 t}{t}\Big) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+4}\right)du = \frac{1}{2}\Big(\log u - \frac{1}{2}\log\big(u^2+4\big)\Big)\Bigg|_p^{+\infty} = \frac{1}{4}\log\frac{u^2}{u^2+4}\Bigg|_p^{+\infty} = \frac{1}{4}\log\frac{p^2+4}{p^2}.$$

Primenjujući ponovo teoremu o integraciji slike nalazimo

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt = \frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty}\log\frac{p^2+4}{p^2}dp = \frac{1}{4}\left(p\log\frac{p^2+4}{p^2}\Bigg|_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} p\left(\frac{2p}{p^2+4} - \frac{2}{p}\right)dp\right)\\ =2\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{p^2+4}dp = \arctan\frac{p}{2}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$