DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

UVOD

1. OSNOVNE DEFINICIJE

DEFINICIJA 1. **Neka je F data funkcija koja preslikava neki podskup iz $\mathbb{R}^{n+1}$ u $\mathbb{R}$. Jednačina**

$$F\big(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\big) = 0 \tag{1}$$

gde je $y : (a,b) \to \mathbb{R}$ nepoznata, n puta diferencijabilna funkcija, naziva se (obična) diferencijalna jednačina reda n, ako u njoj efektivno učestvuje izvod $y^{(n)}(x)$.

PRIMER 1. Jednačina $y''+y' = 0$ je diferencijalna jednačina drugog, a $y'y''y''' = xy$ je diferencijalna jednačina trećeg reda.

PRIMER 2. Jednačina $F(x, y, y') = 0$ je opšta diferencijalna jednačina prvog reda (pod uslovom $\partial F/\partial y' \not\equiv 0$). Ako se ta jednačina može rešiti po y', tj. ako se može napisati u obliku $y' = f(x, y)$ kažemo da je ta jednačina zadata eksplicitno.

DEFINICIJA 2. **Rešenje diferencijalne jednačine (1) je takva funkcija $y = f(x)$ koja, zamenjena u (1), pretvara tu jednačinu u identitet**

$$F\big(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)\big) \equiv 0.$$

PRIMER 3. Funkcije $y = e^x$, $y = \cosh x$, $y = e^x + 2e^{-x}$ su rešenja jednačine $y'' = y$.

DEFINICIJA 3. **Neka su $F_1, \ldots, F_n$ date funkcije koje preslikavaju neki podskup iz $\mathbb{R}^{n+1}$ u $\mathbb{R}$. Sistem jednačina**

$$y_k' = F_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

naziva se eksplicitan sistem diferencijalnih jednačina prvog reda po nepoznatim funkcijama $y_k : (a,b) \to \mathbb{R} (k = 1, \ldots, n)$.

DEFINICIJA 4. **Rešenje sistema jednačina (2) je uređena n-torka $\big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big)$ takva da, stavljajući $y_k = f_k(x)$ u (2), ovaj sistem postaje identitet, tj. važi**

$$f_k'(x) \equiv F_k\big(x, f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\big) \quad (k = 1, \ldots, n).$$

PRIMER 4. Uređena trojka $\big(e^{2x}, e^{2x} + e^{-x}, e^{2x} - e^{-x}\big)$ je rešenje sistema jednačina

$$y_1' = y_2 + y_3, \quad y_2' = y_1 + y_3, \quad y_3' = y_1 + y_2.$$

2. POJAM OPŠTEG I CAUCHYEVOG REŠENJA

DEFINICIJA 5. **Neka je data jednakost**

$$G(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \tag{3}$$

gde su $C_1, \ldots, C_n$ proizvoljne konstante. Ako jednakost (3) definiše funkciju $y(x)$ koja identički zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$F\big(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\big) = 0, \tag{4}$$

i ako eliminacija proizvoljnih konstanti $C_1, \ldots, C_n$ iz (3) i n izvodnih jednakosti dovodi samo do jednačine (4), tada kažemo da (3) predstavlja opšte rešenje diferencijalne jednačine (4).

Kako diferencijalna jednačina može imati više od jednog rešenja, uz datu jednačinu postavljaju se i dodatni uslovi koji u nekim slučajevima obezbeđuju jedinstvenost rešenja.

Tako, na primer, za diferencijalnu jednačinu (4) često se postavlja sledeći, tzv. Cauchyev problem, ili problem sa početnim uslovima:

Odrediti ono rešenje jednačine (4) koje zadovoljava uslove

$$y(x_0) = a_1,\ y'(x_0) = a_2, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = a_n \tag{5}$$

gde su $x_0, a_1, \ldots, a_n$ dati brojevi.

Rešenje jednačine (4) uz uslove (5), tj. rešenje sistema (4)-(5), naziva se Cauchyevo rešenje jednačine (4).

REŠAVANJE DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA PRVOG REDA

1. ELEMENTARNO REŠAVANJE JEDNAČINA

Ako se rešenje neke diferencijalne jednačine može definisati pomoću konačno mnogo jednakosti u kojima učestvuju samo elementarne funkcije, i to u konačnom broju, kažemo da je jednačina eksplicitno rešena.

Ako dopustimo da u rešenju diferencijalne jednačine pored elementarnih funkcija učestvuju i neelementarne funkcije definisane diferencijalnim jednačinama oblika $y' = f(x)$, kažemo da je rešenje izraženo pomoću kvadratura.

PRIMER 1. Diferencijalna jednačina

$$xy' = e^x + 1$$

ima opšte rešenje

$$y = \int \frac{1}{x} e^x \, dx + C \ln |x|,$$

gde je C proizvoljna konstanta, koje je izraženo pomoću kvadratura.

Eksplicitna rešenja i rešenja izražena pomoću kvadratura nazivaju se elementarna rešenja.

2. METOD RAZDVAJANJA PROMENLJIVIH

Direktnom integracijom diferencijalne jednačine $y' = f(x)$ nalazimo njeno opšte rešenje

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C,$$

gde je C proizvoljna konstanta i x_0 podesno izabrana konstanta.

Opštija jednačina

$$f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0. \tag{1}$$

ima rešenje

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} g(y)\,dy = C,$$

gde je C proizvoljna konstanta i x_0, y_0 podesno izabrane konstante.

Dakle, diferencijalna jednačina (1) ima rešenje y koje je definisano relacijom oblika

$$F(x) + G(y) = C,$$

dakle, dato je implicitno.

PRIMER 2. Jednačina

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = 0$$

ima opšte rešenje

$$\arcsin x + \arcsin y = C,$$

gde je C proizvoljna konstanta.

3. HOMOGENA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA

Diferencijalna jednačina

$$y' = f\Big(\frac{y}{x}\Big) \tag{2}$$

naziva se homogena diferencijalna jednačina.

Jednačinu (2) rešavamo na sledeći način. Uvedimo smenu $y = ux$, gde je u nova nepoznata funkcija. Imamo $y' = u'x + u$, pa jednačina (2) postaje

$$u'x + u = f(u),$$

tj.

$$x\,du = \big(f(u) - u\big)\,dx. \tag{3}$$

Pretpostavimo da je $f(u) \not\equiv u$ i $x \neq 0$. Iz (3) dobijamo

$$\frac{1}{f(u)-u}\,du = \frac{1}{x}\,dx,$$

tj. diferencijalnu jednačinu gde su promenljive razdvojene. Posle integracije nalazimo

$$\log|x| = \int_{u_0}^{u} \frac{1}{f(u)-u}\,du + C_1,$$

odakle je

$$x = C\exp\int_{u_0}^{u} \frac{1}{f(u)-u}\,du,$$

gde je $C = \pm e^{C_1} \neq 0$ proizvoljna konstanta.

Stavimo li $F(u) = C\exp\int_{u_0}^{u} \frac{1}{f(u)-u}\,du$, vidimo da opšte rešenje jednačine (2) ima implicitan oblik

$$x = F\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

Ako je $f(u) \equiv u$, tada su promenljive u jednačini (2) razdvojene.

4. LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA

Diferencijalna jednačina oblika

$$y' + f(x)y = g(x), \tag{1}$$

gde su f i g date funkcije, naziva se linearna diferencijalna jednačina. Ako je $g(x) \equiv 0$, jednačina (1) se naziva homogena diferencijalna jednačina; inače je nehomogena.

Odredimo, prvo, opšte rešenje homogene jednačine

$$y' + f(x)y = 0. \tag{2}$$

Za $y \neq 0$ jednačina (2) može se predstaviti u obliku

$$\frac{1}{y}\,dy = -f(x)\,dx,$$

odakle izlazi

$$\log|y| = -\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C_1,$$

tj.

$$y = C\exp\Big(-\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\Big), \tag{3}$$

gde je $C = \pm e^{C_1}$ proizvoljna konstanta. Međutim, možemo uzeti i $C = 0$; tada dobijamo $y = 0$ kao rešenje jednačine (2).

Iskoristimo sada opšte rešenje (3) jednačine (2) za određivanje opšteg rešenja jednačine (1). Pretpostavićemo da C koje figuriše u (3) nije konstanta, već diferencijabilna funkcija promenljive x, i odredićemo tu funkciju tako da (3) zadovoljava i jednačinu (1).

Polazeći od

$$y = C(x)\exp\Bigl(-\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\Bigr), \tag{4}$$

posle diferenciranja nalazimo

$$y' = C'(x)\Bigl(-\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\Bigr) - C(x)f(x)\exp\Bigl(-\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\Bigr). \tag{5}$$

Ako (4) i (5) zamenimo u (1), dobijamo

$$C'(x)\exp\Bigl(-\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\Bigr) = g(x),$$

tj.

$$C'(x) = g(x)\exp\Bigl(\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\Bigr),$$

odakle neposredno dobijamo

$$C(x) = C + \int_{x_0}^{x} g(x)\exp\Bigl(\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\Bigr)\,dx.$$

Dakle, opšte rešenje jednačine (1) glasi

$$y = \exp\Bigl(-\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\Bigr)\Bigl(C + \int_{x_0}^{x} g(x)\exp\Bigl(\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\Bigr)\,dx\Bigr),$$

gde je C proizvoljna konstanta.

PRIMER 1. Opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y' + \frac{1}{x}y = x$$

glasi

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{1}{x}\,dx}\Bigl(C + \int_{x_0}^{x} x e^{\int_{x_0}^{x} \frac{1}{x}\,dx}\,dx\Bigr),$$

tj.

$$y = \frac{1}{x}\Bigl(C + \frac{x^3}{3}\Bigr) = C\frac{1}{x} + \frac{x^2}{3}.$$

5. BERNOULLIEVA JEDNAČINA

Diferencijalna jednačina oblika

$$y' + f(x)y = g(x)y^r \quad (r \in \mathbb{R}), \tag{1}$$

naziva se Bernoullieva jednačina.

Za $r = 0$ ili $r = 1$ jednačina (1) postaje linearna jednačina.

Ako je $r \neq 0$ i $r \neq 1$, uvedimo smenu $y = z^k$, gde je z nova nepoznata funkcija i k konstanta. Imamo $y' = kz^{k-1}z'$ i jednačina (1) postaje

$$kz^{k-1}z' + f(x)z^k = g(x)z^{kr},$$

tj.

$$z' + \frac{1}{k}f(x)z = \frac{1}{k}g(x)z^{kr-k+1}. \tag{2}$$

Izaberimo k tako da bude $kr - k + 1 = 0$, tj. izmimo $k = \dfrac{1}{1-r}$. Tada (2) glasi

$$z' + \frac{1}{k}f(x)z = \frac{1}{k}g(x),$$

a to je linearna diferencijalna jednačina.

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE DRUGOG REDA

1. SLUČAJEVI SVOĐENJA NA JEDNAČINU PRVOG REDA

Opšta diferencijalna jednačina drugog reda glasi

$$F(x, y, y', y'') = 0. \tag{1}$$

U nekim slučajevima jednačina (1) može se svesti na diferencijalnu jednačinu prvog reda.

1. Pretpostavimo da F ne zavisi od y, tj. da jednačina glasi

$$F(x, y', y'') = 0. \tag{2}$$

Tada se jednačina (2) pomoću smene $u = y'$ (odakle sleduje $u' = y''$) svodi na jednačinu prvog reda

$$F(x, u, u') = 0.$$

2. Pretpostavimo da funkcija F ne zavisi od x, tj. da jednačina ima oblik

$$F(y, y', y'') = 0. \tag{3}$$

Uvedimo smenu $y' = u$. Tada je $y'' = \dfrac{du}{dx} = \dfrac{du}{dy}\dfrac{dy}{dx} = u\dfrac{du}{dy}$. Jednačina (3), dakle, postaje jednačina prvog reda

$$F\Big(y, u, u\frac{du}{dy}\Big) = 0.$$

3. Pretpostavimo da je F homogena funkcija stepena (reda) λ po y, y', y'', tj. da za funkciju F važi
$$F(x, tx_1, tx_2, tx_3) = t^\lambda F(x, x_1, x_2, x_3) \quad (t > 0). \tag{4}$$

Tada se jednačina (1) smenom $y = e^{\int u\,dx}$ svodi na diferencijalnu jednačinu prvog reda. Zaista, ako je $y = e^{\int u\,dx}$, imamo $y' = ue^{\int u\,dx}$, $y'' = (u' + u^2)e^{\int u\,dx}$, i jednačina (1) postaje
$$F\big(x, e^{\int u\,dx}, ue^{\int u\,dx}, (u' + u^2)e^{\int u\,dx}\big) = 0,$$
tj. zbog osobine (4)
$$F(x, 1, u, u' + u^2) = 0.$$

<u>2. LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA DRUGOG REDA</u>

Posmatraćemo opštu diferencijalnu jednačinu drugog reda
$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x). \tag{1}$$

Ako je $h(x) \not\equiv 0$, kažemo da je jednačina (1) nehomogena jednačina. Odgovarajuća homogena jednačina dobija se za $h(x) \equiv 0$. Ona, dakle, glasi
$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0. \tag{2}$$

Neke važnije osobine jednačina (1) i (2) formulisaćemo u obliku teorema.

TEOREMA 1. *Ako je $y_1(x)$ rešenje jednačine (2), tada je $Cy_1(x)$, gde je C proizvoljna konstanta, takođe rešenje te jednačine.*

<u>Dokaz.</u> Ako je $y = Cy_1$, imamo $y' = Cy_1'$, $y'' = Cy_1''$, pa zamenjujući ove izraze u (2), dobijamo
$$C\big(y_1'' + f(x)y_1' + g(x)y_1\big) \equiv 0,$$
jer je, po pretpostavci, y_1 rešenje jednačine (2), tj. važi
$$y_1'' + f(x)y_1' + g(x)y_1 \equiv 0. \qquad \square$$

TEOREMA 2. *Ako su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ rešenja jednačine (2), tada je $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante, takođe rešenje te jednačine.*

<u>Dokaz.</u> Ako je $y = C_1y_1 + C_2y_2$, tada je
$$y' = C_1y_1' + C_2y_2' \quad \text{i} \quad y'' = C_1y_1'' + C_2y_2'',$$
pa zamenjujući ove izraze u (2), dobijamo
$$\begin{aligned}&C_1y_1'' + C_2y_2'' + f(x)(C_1y_1' + C_2y_2') + g(x)(C_1y_1 + C_2y_2)\\ =&C_1\big(y_1'' + f(x)y_1' + g(x)y_1\big) + C_2\big(y_2'' + f(x)y_2' + g(x)y_2\big) \equiv 0,\end{aligned}$$
jer su y_1 i y_2, po pretpostavci, rešenja jednačine (2). $\square$

TEOREMA 3. *Opšte rešenje jednačine (2) dato je izrazom $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante, a y_1 i y_2 su linearno nezavisna rešenja jednačine (2), tj. takva rešenja da ne postoje konstante k_1 i k_2 $(k_1^2 + k_2^2 > 0)$ za koje važi*

$$k_1y_1 + k_2y_2 = 0.$$

<u>**Dokaz.**</u> Na osnovu Teoreme 2, $y = C_1y_1 + C_2y_2$ je rešenje jednačine (2). Da bismo dokazali da je to rešenje opšte, eliminišimo proizvoljne konstante C_1 i C_2 iz jednakosti

$$y = C_1y_1 + C_2y_2, \tag{3}$$
$$y' = C_1y_1' + C_2y_2', \tag{4}$$
$$y'' = C_1y_1'' + C_2y_2''. \tag{5}$$

Eliminacija C_1 i C_2 iz (3), (4) i (5) daje jednačinu

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y' & y_1' & y_2' \\ y'' & y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = 0,$$

tj. jednačinu

$$(y_1y_2' - y_1'y_2)y'' - (y_1y_2'' - y_1''y_2)y' + (y_1'y_2'' - y_1''y_2')y = 0. \tag{6}$$

Pretpostavimo da je $y_1y_2' - y_1'y_2 \neq 0$. Tada (6) postaje

$$y'' - \frac{y_1y_2'' - y_1''y_2}{y_1y_2' - y_1'y_2}y' + \frac{y_1'y_2'' - y_1''y_2'}{y_1y_2' - y_1'y_2}y = 0. \tag{7}$$

Međutim, y_1 i y_2 su rešenja jednačine (2), pa važi

$$y_1'' = -f(x)y_1' - g(x)y_1, \quad y_2'' = -f(x)y_2' - g(x)y_2 \tag{8}$$

Zamenjujući izraze (8) u (7), nalazimo

$$\begin{aligned} y'' + &\frac{y_1\big(f(x)y_2' + g(x)y_2\big) - \big(f(x)y_1' + g(x)y_1\big)y_2}{y_1y_2' - y_1'y_2}y' \\ &+ \frac{\big(f(x)y_1' + g(x)y_1\big)y_2' - y_1'\big(f(x)y_2' + g(x)y_2\big)}{y_1y_2' - y_1'y_2}y = 0, \end{aligned}$$

tj.

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0.$$

Dakle, (3) predstavlja opšte rešenje jednačine (2) pod uslovom $y_1y_2' - y_1'y_2 \neq 0$. Dokažimo sada da ne može da nastupi jednakost $y_1y_2' - y_1'y_2 = 0$. Zaista, kad bi bilo $y_1y_2' - y_1'y_2 = 0$, imali bismo

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{y_2'}{y_2},$$

odakle izlazi $y_1 = ky_2$ ($k =$const), suprotno pretpostavci.

TEOREMA 4. *Ako je poznato jedno partikularno rešenje $y_1(x)$ jednačine (2), tada se može odrediti i drugo partikularno rešenje te jednačine.*

Dokaz. Neka je $y_1(x)$ jedno partikularno rešenje jednačine (2). Uvedimo smenu

$$y(x) = y_1(x)z(x).$$

Tada je

$$y' = y_1'z + y_1z' \quad \text{i} \quad y'' = y_1''z + 2y_1'z' + y_1z''$$

i jednačina (2) postaje

$$y_1''z + 2y_1'z' + y_1z'' + f(x)(y_1'z + y_1z') + g(x)y_1z = 0,$$

ili posle sređivanja,

$$y_1z'' + (2y_1' + f(x)y_1)z' + (y_1'' + f(x)y_1' + g(x)y_1)z = 0,$$

tj.

$$y_1z'' + (2y_1' + f(x)y_1)z' = 0, \tag{9}$$

jer je, po pretpostavci, y_1 rešenje jednačine (2).

Jednačina (9) može se rešiti. Imamo

$$\frac{z''}{z'} = -2\frac{y_1'}{y_1} - f(x),$$

odakle je

$$\log|z'| = -2\log|y_1| - \int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx,$$

tj.

$$z' = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx}$$

(dovoljno je bilo uzeti ovo partikularno rešenje). Posle ponovne integracije, nalazimo

$$z = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{1}{y_1^2}e^{-\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx}\,dx,$$

Dakle, drugo partikularno rešenje jednačine (2) dato je sledećom, tzv. Liouvilleovom, formulom

$$y_2 = y_1\int\limits_{x_0}^{x} \frac{1}{y_1^2}e^{-\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx}\,dx. \quad \square$$

TEOREMA 5. *Ako je poznato jedno partikularno rešenje nehomogene jednačine (1), tada se jednačina (1) može svesti na homogenu jednačinu (2).*

Dokaz. Neka je y_1 jedno partikularno rešenje jednačine (1). Uvedimo smenu $y = y_1 + z$, gde je z nova nepoznata funkcija promenljive x. Tada je

$$y' = y_1' + z', \quad y'' = y_1'' + z''$$

i jednačina (1) postaje

$$y_1'' + z'' + f(x)(y_1' + z') + g(x)(y_1 + z) = h(x),$$

tj.

$$(z'' + f(x)z' + g(x)z) + (y_1'' + f(x)y_1' + g(x)y_1) = h(x),$$

odnosno

$$z'' + f(x)z' + g(x)z = 0,$$

jer je y_1, po pretpostavci, rešenje jednačine (1). $\square$

TEOREMA 6. *Ako je poznato opšte rešenje homogene jednačine (2), tada se može odrediti opšte rešenje nehomogene jednačine (1).*

Dokaz. Neka je opšte rešenje jednačine (2) dato sa

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{10}$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

Pretpostavimo da C_1 i C_2 nisu konstante, već diferencijabilne funkcije promenljive x i odredimo ih tako da (10) prestavlja rešenje jednačine (1).

Prema tome, uzmimo da je

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x). \tag{11}$$

Posle diferenciranja nalazimo

$$y' = C_1'(x) y_1(x) + C_1(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2(x) + C_2(x) y_2'(x). \tag{12}$$

Stavimo

$$C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0, \tag{13}$$

tako da (12) postaje

$$y' = C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x). \tag{14}$$

Posle još jednog diferenciranja imamo

$$y'' = C_1'(x) y_1'(x) + C_1(x) y_1''(x) + C_2'(x) y_2'(x) + C_2(x) y_2''(x). \tag{15}$$

Zamenimo (11), (14) i (15) u (1). Dobijamo

$$\begin{aligned} C_1'(x) y_1'(x) &+ C_1(x) y_1''(x) + C_2'(x) y_2'(x) + C_2(x) y_2''(x) \\ &+ f(x)(C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x)) \\ &+ g(x)(C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)) = h(x), \end{aligned}$$

tj.

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = h(x). \tag{16}$$

Kako je (10) opšte rešenje jednačine (7), imamo $y_1y_2' - y_1'y_2 \neq 0$, pa iz sistema jednačina (13) i (16) dobijamo C_1' i C_2':

$$C_1'(x) = \frac{-hy_2}{y_1y_2' - y_1'y_2}, \quad C_2'(x) = \frac{hy_1}{y_1y_2' - y_1'y_2},$$

odakle posle integracije nalazimo

$$C_1(x) = C_1^\star + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{-hy_2}{y_1y_2' - y_1'y_2}\,dx, \quad C_2(x) = C_2^\star + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{hy_1}{y_1y_2' - y_1'y_2}\,dx,$$

gde su $C_1^\star$ i $C_2^\star$ proizvoljne konstante.

Dakle, opšte rešenje jednačine (1) glasi

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + y_1\int\limits_{x_0}^{x} \frac{-hy_2}{y_1y_2' - y_1'y_2}\,dx + y_2\int\limits_{x_0}^{x} \frac{hy_1}{y_1y_2' - y_1'y_2}\,dx,$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante (zvezdice kod $C_1^\star$ i $C_2^\star$ su izostavljene). $\square$

3. HOMOGENA LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

U ovom odeljku posmatraćemo diferencijalnu jednačinu

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{1}$$

gde su a, b i c realne konstante i $a \neq 0$.

Potražimo rešenje jednačine (1) u obliku $y = e^{\lambda x}$, gde je λ konstanta. Tada imamo $y' = \lambda e^{\lambda x}$ i $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Stoga jednačina (1) postaje

$$a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = 0,$$

tj.

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \tag{2}$$

Dakle, $e^{\lambda x}$ je rešenje jednačine (1) ako λ zadovoljava tzv. karakterističnu jednačinu (2).

Razlikujemo tri slučaja.

1. Kvadratna jednačina (2) ima dva različita realna korena, recimo λ_1 i λ_2. Tada su $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ i $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ linearno nezavisna rešenja jednačine (1), jer je

$$y_1y_2' - y_1'y_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} \neq 0$$

za $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Stoga je opšte rešenje jednačine (1) dato sa

$$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x},$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

2. Kvadratna jednačina (2) ima dva različita kompleksna korena, recimo λ_1 i λ_2. Tada je $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $\beta \neq 0$).

Na osnovu prethodnog, rešenje jednačine (1) može se izraziti u obliku

$$y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}. \tag{3}$$

Kako je $e^{i\omega} = \cos\omega + i\sin\omega$, rešenju (3) možemo dati i sledeći oblik:

$$\begin{aligned} y &= e^{\alpha x}\big(C_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + C_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)\big) \\ &= e^{\alpha x}\big((C_1+C_2)\cos\beta x + i(C_1-C_2)\sin\beta x\big), \end{aligned}$$

tj.

$$y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x), \tag{4}$$

gde su A i B proizvoljne konstante.

Stavljajući $A = \rho\cos\omega$, $B = \rho\sin\omega$, rešenje (4) možemo predstaviti i u obliku

$$y = \rho e^{\alpha x}\cos(\beta x - \omega),$$

gde su ρ i ω proizvoljne konstante.

3. Kvadratna jednačina (2) ima dva jednaka realna korena, tj. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. U slučaju $\lambda_1 \neq \lambda_2$ jednačinu (1) zadovoljava funkcija

$$\frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Potražimo stoga graničnu vrednost te funkcije kad $\lambda_2 \to \lambda_1 = \lambda$. Dobijamo

$$\lim_{\lambda_2\to\lambda_1=\lambda} \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} = xe^{\lambda x}.$$

Neposrednom proverom utvrđujemo da $y_2 = xe^{\lambda x}$ zaista zadovoljava jednačinu (1) pod uslovom da ona ima dva jednaka realna korena, tj. pod uslovom da je $b^2 = 4ac$.

Partikularna rešenja $y_1 = e^{\lambda x}$ i $y_2 = xe^{\lambda x}$ jednačine (1) su linearno nezavisna, jer je $y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^{2\lambda x} \neq 0$. Stoga, opšte rešenje jednačine (1) u ovom slučaju glasi

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(C_1 + C_2 x),$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

PRIMER 1. Da bismo odredili opšte rešenje jednačine

$$y'' + y' + y = 0,$$

rešimo algebarsku jednačinu

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0. \tag{5}$$

Rešenja jednačine (5) su $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ i $\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Stoga opšte rešenje jednačine (5) glasi

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}\Big(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\Big),$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante, ili

$$y = Re^{-\frac{1}{2}x}\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \omega\Big),$$

gde su R i ω proizvoljne konstante.

PRIMER 2. Kako u slučaju diferencijalne jednačine

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \tag{6}$$

odgovarajuća karakteristična jednačina

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

ima dvostruki koren $\lambda = 2$, zaključujemo da je opšte rešenje jednačine (6) dato sa

$$y = e^{2x}(C_1 + C_2x),$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

4. NEHOMOGENA LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

Nehomogena linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima glasi

$$ay'' + by' + cy = h(x), \tag{1}$$

gde su a, b i c ($a \neq 0$) realne konstante i $h(x)$ neprekidna funkcija.

S obzirom da se uvek može odrediti opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{2}$$

na osnovu Teoreme 6 zaključujemo da se može odrediti i opšte rešenje nehomogene jednačine (1).

Međutim, za neke specijalne slučajeve oblika funkcije h može se izbeći metod varijacije konstanata. Navešćemo tri takva oblika.

1. $h(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$. Ako je $c \neq 0$, partikularno rešenje jednačine (1) tražimo u obliku polinoma

$$y = A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_0. \tag{3}$$

Koeficijenti polinoma (3) dobijaju se metodom neodređenih koeficijenata.

Ako je $c = 0$ i $b \neq 0$, partikularno rešenje tražimo u obliku

$$y = x(A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_0).$$

Najzad, ako je $b = c = 0$, rešenje jednačine (1) dobija se direktnom integracijom.

PRIMER 1. Posmatrajmo jednačinu

$$y'' + y = x^2 - 1. \tag{4}$$

Opšte rešenje homogene jednačine $y'' + y = 0$ glasi $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante. Partikularno rešenje jednačine (4) tražimo u obliku $y = ax^2 + bx + c$. Tada je $y' = 2ax + b$, $y'' = 2a$, i (4) postaje

$$2a + ax^2 + bx + c \equiv x^2 - 1,$$

odakle je

$$a = 1, \quad b = 0, \quad 2a + c = -1,$$

tj.

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = -3.$$

Prema tome, opšte rešenje jednačine (4) glasi

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 3,$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

2. $h(x) = Ae^{\alpha x}$. Ako α nije rešenje karakteristične jednačine

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \tag{5}$$

tada partikularno rešenje tražimo u obliku $y = Ke^{\alpha x}$, gde je K privremeno neodređena konstanta. Ako je α prosta nula jednačine (5), partikularno rešenje tražimo u obliku $y = Kxe^{\alpha x}$; ako je α dvostruka nula te jednačine, tada rešenje tražimo u obliku $y = Kx^2e^{\alpha x}$.

PRIMER 2. Neka je data jednačina

$$y'' - 2y' + y = e^x.$$

Opšte rešenje homogene jednačine glasi $y = (C_1 + C_2 x)e^x$. Kako je 1 dvostruko rešenje karakteristične jednačine $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, partikularno rešenje tražimo u obliku $y = Kx^2e^x$. Imamo $y' = 2Kxe^x + Kx^2e^x$ i $y'' = 2Ke^x + 4Kxe^x + Kx^2e^x$, pa je stoga

$$Kx^2e^x + 4Kxe^x + 2Ke^x - 2Kx^2e^x - 4Kxe^x + Kx^2e^x \equiv e^x,$$

odakle je $K = 1/2$. Dakle, opšte rešenje date jednačine je $y = (C_1 + C_2 x)e^x + \frac{1}{2}x^2e^x$, gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

3. $h(x) = A \cos px + B \sin px$. Ako ip nije koren karakteristične jednačine (5), partikularno rešenje tražimo u obliku

$$y = K_1 \cos px + K_2 \sin px,$$

a ako jeste, onda rešenje tražimo u obliku

$$y = x(K_1 \cos px + K_2 \sin px).$$

LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA REDA n

1. UVOD

DEFINICIJA 1. Diferencijalna jednačina oblika

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_{n-1}(x)y' + f_n(x)y = F(x), \tag{1}$$

gde su $f_1, \dots, f_n, F$ date neprekidne funkcije promenljive x, naziva se linearna diferencijalna jednačina n-tog reda.

DEFINICIJA 2. Ako je $F \equiv 0$, jednačina (1) naziva se homogena jednačina; ako je $F \not\equiv 0$, ona se naziva nehomogena jednačina.

DEFINICIJA 3. Ako su funkcije $f_1, \dots, f_n$ konstante, jednačina (1) naziva se linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima.

TEOREMA 1. *Neka su $y_1, \dots, y_n$ rešenja homogene jednačine*

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_n(x)y = 0$$

i neka je

$$W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Tada je

$$W(y_1, \dots, y_n) = W_0 \exp\Big(-\int_{x_0}^{x} f_1(x)\,dx\Big),$$

gde je $W_0 = W\big(y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)\big)$.

2. OBLIK REŠENJA LINEARNE JEDNAČINE

TEOREMA 1. *Neka su $y_1, \dots, y_n$ rešenja homogene jednačine*

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_n(x)y = 0 \tag{1}$$

za koja važi $W(y_1, \dots, y_n) \neq 0$. Tada je

$$C_1y_1 + \cdots + C_ny_n,$$

gde su $C_1, \dots, C_n$ proizvoljne konstante, opšte rešenje jednačine (1).

TEOREMA 2. *Neka su $y_1, \dots, y_n$ rešenja homogene jednačine (1) za koja važi $W(y_1, \dots, y_n) \neq 0$, i neka je v rešenje nehomogene jednačine*

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_n(x)y = F(x) \tag{2}$$

Tada je

$$v + C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n,$$

gde su $C_1, \ldots, C_n$ *proizvoljne konstante, opšte rešenje jednačine (2).*

3. LINEARNA JEDNAČINA SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

Posmatrajmo homogenu jednačinu sa konstantnim koeficijentima

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0 \quad (a_i \in \mathbb{R};\ i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

i odredimo njeno opšte rešenje. Na osnovu Teoreme 1 dovoljno je odrediti n linearno nezavisnih rešenja jednačine (1).

Neposredno se utvrđuje da je e^{rx} rešenje jednačine (1) ako je r koren tzv. karakteristične jednačine

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n = 0. \tag{2}$$

Razlikujemo sledeće slučajeve:

1. Koreni jednačine (2) su realni i različiti. Neka su ti koreni označeni sa $r_1, \ldots, r_n$. U tom slučaju je opšte rešenje jednačine (1) dato sa

$$C_1 e^{r_1 x} + \cdots + C_n e^{r_n x},$$

gde su $C_1, \ldots, C_n$ proizvoljne konstante.

2. Koreni jednačine (2) su kompleksni i različiti. Tada svakom paru kompleksnih korena $p \pm iq$ $(p, q \in \mathbb{R})$ odgovara sledeći par linearno nezavisnih rešenja

$$e^{px} \cos qx, \quad e^{px} \sin qx$$

jednačine (1).

3. Jendačina (2) ima višestruke korene. Neka je r realan koren reda s jednačine (2). Tada je r koren svih jednačina

$$\frac{d^k}{dr^k}\big(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n\big) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, s-1),$$

na osnovu čega zaključujemo da su $x^k e^{rx}$ $(k = 0, 1, \ldots, s-1)$ rešenja jednačine (1). Šta više, ta rešenja su linearno nezavisna, što se takođe neposredno proverava.

Dakle, realnom korenu reda s jednačine (2) odgovara s linearno nezavisnih rešenja jednačine (1).

Ako je $r = p + iq$ $(p, q \in \mathbb{R})$ kompleksan koren reda s jednačine (2), tada je i $\bar{r} = p - iq$ takođe koren reda s te jednačine. Tom paru višestrukih kompleksnih korena odgovara sledećih $2s$ linearno nezavisnih rešenja

$$x^k e^{px} \cos qx, \quad x^k e^{px} \sin qx \quad (k = 0, 1, \ldots, s-1).$$

Prema tome, u svakom od navedenih slučajeva može se odrediti n linearno nezavisnih rešenja jednačine (1). Proizvoljna linearna kombinacija tih rešenja je opšte rešenje jednačine (1).

SISTEMI LINEARNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

1. SISTEM HOMOGENIH LINEARNIH JEDNAČINA

Da bi uprostili pisanje, posmatraćemo sistem od tri jednačine sa tri nepoznate funkcije. Izložene činjenice bez teškoće se proširuju na sistem od n linearnih diferencijalnih jednačina sa n nepoznatih funkcija.

Neka je dat sistem jednačina

$$\begin{aligned} x' + a_1x + b_1y + c_1z &= 0, \\ y' + a_2x + b_2y + c_2z &= 0, \\ z' + a_3x + b_3y + c_3z &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

gde su a_k, b_k, c_k date neprekidne funkcije promenljive t, a x, y, z nepoznate funkcije iste promenljive.

Rešenje sistema jednačina (1) je bilo koja uređena trojka funkcija $\big(x(t), y(t), z(t)\big)$ koja identički zadovoljava (1).

Opšte rešenje sistema jednačina (1) je rešenje koje sadrži tri proizvoljne konstante koje se mogu odrediti tako da rešenje zadovoljava uslov $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $z(t_0) = z_0$, gde su x_0, y_0, z_0 i t_0 dati brojevi.

Navedimo nekoliko činjenica koje se lako mogu proveriti.

1. Ako je (x, y, z) rešenje sistema jednačina (1), tada je i (Ax, Ay, Az), gde je A proizvoljna konstanta, takođe rešenje tog sistema.

2. Ako su (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2) dva rešenja sistema jednačina (1), tada je $(A_1x_1 + A_2x_2, A_1y_1 + A_2y_2, A_1z_1 + A_2z_2)$ takođe rešenja sistema (1).

3. Ako su (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) i (x_3, y_3, z_3) tri rešenja sistema jednačina (1), tada je

$$(A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3, A_1y_1 + A_2y_2 + A_3y_3, A_1z_1 + A_2z_2 + A_3z_3) \tag{2}$$

takođe rešenje tog sistema. Rešenje (2) je opšte rešenje sistema jednačina (1) ako je

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

za svako t iz posmatranog intervala.

2. SISTEM NEHOMOGENIH LINEARNIH JEDNAČINA

Ako je poznato opšte rešenje sistema homogenih jednačina

$$\begin{aligned} x' + a_1x + b_1y + c_1z &= 0, \\ y' + a_2x + b_2y + c_2z &= 0, \\ z' + a_3x + b_3y + c_3z &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

tada se može odrediti opšte rešenje sistema nehomogenih jednačina

$$\begin{aligned} x' + a_1x + b_1y + c_1z &= h_1, \\ y' + a_2x + b_2y + c_2z &= h_2, \\ z' + a_3x + b_3y + c_3z &= h_3, \end{aligned} \tag{2}$$

gde su h_1, h_2 i h_3 neprekidne funkcije promenljive t.

Zaista, neka je opšte rešenje sistema jednačina (1) dato sa

$$\begin{aligned} x =&A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3, \\ y =&A_1y_1 + A_2y_2 + A_3y_3, \\ z =&A_1z_1 + A_2z_2 + A_3z_3, \end{aligned} \tag{3}$$

gde su A_1, A_2 i A_3 proizvoljne konstante. Ako pretpostavimo da A_1, A_2 i A_3 nisu konstante, već funkcije promenljive t, tada iz (3) proizilazi

$$\begin{aligned} x' =&A_1x_1' + A_2x_2' + A_3x_3' + A_1'x_1 + A_2'x_2 + A_3'x_3, \\ y' =&A_1y_1' + A_2y_2' + A_3y_3' + A_1'y_1 + A_2'y_2 + A_3'y_3, \\ z' =&A_1z_1' + A_2z_2' + A_3z_3' + A_1'z_1 + A_2'z_2 + A_3'z_3. \end{aligned} \tag{4}$$

Zamenjujući (3) i (4) u (2) i vodeći računa da je (3) opšte rešenje sistema jednačina (1), dobijamo

$$\begin{aligned} A_1'x_1 + A_2'x_2 + A_3'x_3 &= h_1, \\ A_1'y_1 + A_2'y_2 + A_3'y_3 &= h_2, \\ A_1'z_1 + A_2'z_2 + A_3'z_3 &= h_3. \end{aligned} \tag{5}$$

Kako je (3) opšte rešenje sistema (1), imamo

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

pa sistem algebarskih jednačina (5) ima jedinstveno rešenje po A_1', A_2' i A_3'.

Direktnom integracijom nalazimo tražene funkcije A_1, A_2 i A_3.

3. HOMOGENI SISTEM SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

Posmatrajmo sistem

$$\begin{aligned} x' + a_1x + b_1y + c_1z &= 0, \\ y' + a_2x + b_2y + c_2z &= 0, \\ z' + a_3x + b_3y + c_3z &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

gde su a_k, b_k, c_k $(k = 1, 2, 3)$ date konstante.

Pretpostavimo da sistem jednačina (1) ima rešenje oblika

$$x = \lambda e^{rt}, \quad y = \mu e^{rt}, \quad z = \nu e^{rt}, \tag{2}$$

gde su λ, μ, ν, r konstante koje treba odrediti.

Zamenjujući (2) u (1), dolazimo do sistema

$$\begin{aligned}(r+a_1)\lambda + \quad b_1\mu + \quad c_1\nu &= 0,\\ a_2\lambda + (r+b_2)\mu + \quad c_2\nu &= 0,\\ a_3\lambda + \quad b_3\mu + (r+c_3)\nu &= 0.\end{aligned} \tag{3}$$

Sistem (3) ima netrivijalna rešenja po λ, μ i ν ako je

$$\begin{vmatrix} r+a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & r+b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & r+c_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Neka su koreni jednačine (4) različiti. Označimo ih sa r_1, r_2 i r_3. Vrednosti $r = r_k$ odgovara netrivijalno rešenje $(\lambda_k, \mu_k, \nu_k)$ sistema (3), gde je $k = 1, 2, 3$. Tada opšte rešenje sistema diferencijalnih jednačina (1) glasi

$$\begin{aligned} x &= A_1\lambda_1 e^{r_1 t} + A_2\lambda_2 e^{r_2 t} + A_3\lambda_3 e^{r_3 t},\\ y &= A_1\mu_1 e^{r_1 t} + A_2\mu_2 e^{r_2 t} + A_3\mu_3 e^{r_3 t},\\ z &= A_1\nu_1 e^{r_1 t} + A_2\nu_2 e^{r_2 t} + A_3\nu_3 e^{r_3 t},\end{aligned}$$

gde su A_1, A_2 i A_3 proizvoljne konstante.

INTEGRACIJA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA POMOĆU REDOVA

1. PRIMENA POTENCIJALNIH REDOVA

Metod ćemo ilustrovati na primeru nalaženja opšteg rešenja diferencijalne jednačine

$$y'' - xy' - y = 0. \tag{1}$$

Pretpostavimo da se rešenje jednačine (1) može napisati u obliku potencijalnog reda, tj.

$$y = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k x^k = A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n + \ldots \tag{2}$$

koji je konvergentan u intervalu $(-R, R)$, gde je $R > 0$.

Uzastopnim diferenciranjem reda (1) dobijaju se sledeći redovi, koji su takođe konvergentni u intervalu $(-R, R)$

$$y' = \sum_{k=1}^{+\infty} kA_k x^{k-1} = A_1 + \cdots + nA_n x^{n-1} + \ldots, \tag{3}$$

$$y'' = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)A_k x^{k-2} = 2A_2 + \cdots + n(n-1)A_n x^{n-2} + \ldots \tag{4}$$

Zamenom (2), (3) i (4) u (1) dobijamo

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)A_k x^{k-2} - x\sum_{k=1}^{+\infty} kA_k x^{k-1} - \sum_{k=0}^{+\infty} A_k x^k = 0,$$

tj.

$$2A_2 - A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)\Big((k+2)A_{k+2} - A_k\Big)x^k = 0.$$

Iz poslednje jednakosti sleduje

$$2A_2 - A_0 = 0, \quad kA_k - A_{k-2} = 0 \quad (k = 3, 4, \dots)$$

odakle se izračunavaju koeficijenti A_k.

Za $k = 2m$ važi

$$A_{2m} = \frac{A_0}{(2m)!!},$$

a za $k = 2m+1$

$$A_{2m+1} = \frac{A_1}{(2m+1)!!}.$$

Dakle, opšte rešenje diferencijalne jednačine (1) je

$$y(x) = A_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!!} + A_1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!!}, \tag{5}$$

gde su A_0 i A_1 proizvoljne konstante.

Redovi koji se javljaju u (5) su konvergentni za svako $x \in \mathbb{R}$.